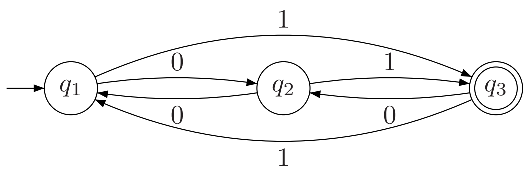
Aufgabe 3.2.2:

Die Übergangstabelle eines DEA siehe wie folgt aus:

	0	1
$\rightarrow q_1$	q_2	q_3
q_2	q_1	q_3
$^*q_3$	q_2	q_1

Die Graph eines DEA sehe wie folgt aus:



a) Formulieren Sie alle regulären Ausdrücke $R_{ij}^{(0)}$. *Hinweis:* Stellen Sie sich den Zustand q_i so vor, als handle es sich um den Zustand mit der ganzzahligen Nummer i.

b) Formulieren Sie alle regulären Ausdrücke $R_{ij}^{(1)}$. Versuchen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

c) Formulieren Sie alle regulären Ausdrücke $R_{ij}^{(2)}$. Versuchen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

d) Formulieren Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache des Automaten.

e) Konstruieren Sie das Übergangsdiagramm für den DEA, und geben sie einen regulären Ausdruck für die Sprache des Automaten an, indem sie q_2 eleminieren.

Lösung:

a) Analog zu Aufgabe 3.2.1 werden nun alle $R_{ij}^{(0)}$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ bestimmt. Zur Verkürzung wird hier auf längere Erklärungen verzichtet:

1) $R_{11}^{(0)} = \varepsilon$

2) $R_{12}^{(0)} = 0$

3) $R_{13}^{(0)} = 1$

4) $R_{21}^{(0)} = 0$

5) $R_{22}^{(0)} = \varepsilon$

6) $R_{23}^{(0)} = 1$

7) $R_{31}^{(0)} = 1$

8) $R_{32}^{(0)} = 0$

9) $R_{33}^{(0)} = \varepsilon$

b) Analog zu Aufgabe 3.2.1 werden nun aus den $R_{ij}^{(0)}$ alle $R_{ij}^{(1)}$ gebildet mit $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$:

1) $R_{11}^{(1)} = R_{11}^{(1-1)} + R_{11}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{11}^{(1-1)}$
$= \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon$
$= \varepsilon$

2) $R_{12}^{(1)} = R_{12}^{(1-1)} + R_{11}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{12}^{(1-1)}$
$= 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0$
$= 0$

3) $R_{13}^{(1)} = R_{13}^{(1-1)} + R_{11}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{13}^{(1-1)}$
$= 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1$
$= 1$

4) $R_{21}^{(1)} = R_{21}^{(1-1)} + R_{21}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{11}^{(1-1)}$
$= 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon$
$= 0$

5) $R_{22}^{(1)} = R_{22}^{(1-1)} + R_{21}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{12}^{(1-1)}$
$= \varepsilon + 0\varepsilon^*0$
$= \varepsilon + 00$

6) $R_{23}^{(1)} = R_{23}^{(1-1)} + R_{21}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{13}^{(1-1)}$
$= 1 + 01$

7) $R_{31}^{(1)} = R_{31}^{(1-1)} + R_{31}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{11}^{(1-1)}$
$= 1 + 1\varepsilon^*\varepsilon$
$= 1$

8) $R_{32}^{(1)} = R_{32}^{(1-1)} + R_{31}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{12}^{(1-1)}$
$= 0 + 01$

9) $R_{33}^{(1)} = R_{33}^{(1-1)} + R_{31}^{(1-1)}(R_{11}^{(1-1)})^* R_{13}^{(1-1)}$
$= \varepsilon + 11$

c) Analog zu Aufgabe 3.2.1 werden nun aus den $R_{ij}^{(1)}$ alle $R_{ij}^{(2)}$ gebildet mit $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$:

1) $R_{11}^{(2)} = R_{11}^{(2-1)} + R_{12}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{21}^{(2-1)}$
$\varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0$
$\varepsilon + 0(00)^*0$

2) $R_{12}^{(2)} = R_{12}^{(2-1)} + R_{12}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{22}^{(2-1)}$
$= 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00)$
$= 0 + 0(00)^*$

3) $R_{13}^{(2)} = R_{13}^{(2-1)} + R_{12}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{23}^{(2-1)}$
$= 1 + 0(00)^*(1 + 01)$
$= 1 + 0(00)^*1 + 0(00)^*01$

4) $R_{21}^{(2)} = R_{21}^{(2-1)} + R_{22}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{21}^{(2-1)}$
$= 0 + (\varepsilon + 00)^*0$
$= 0 + (00)^*0$
$= 0(00)^*$

5) $R_{22}^{(2)} = R_{22}^{(2-1)} + R_{22}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{22}^{(2-1)}$
$(\varepsilon + 00) + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00)$
$(\varepsilon + 00)^*$

6) $R_{23}^{(2)} = R_{23}^{(2-1)} + R_{22}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{23}^{(2-1)}$
$= (1 + 01) + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01)$
$= (00)^*(1 + 01)$
$= (00)^*1 + (00)^*01$

7) $R_{31}^{(2)} = R_{31}^{(2-1)} + R_{32}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{21}^{(2-1)}$
$= 1 + (0 + 10)(00)^*0$
$= 1 + 0(00)^*0 + 10(00)^*0$

8) $R_{32}^{(2)} = R_{32}^{(2-1)} + R_{32}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{22}^{(2-1)}$
$= 0 + 01 + (0 + 01)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00)$
$= 0 + 01 + (0 + 01)(00)^*$
$= 0 + 01 + 0(00)^* + 01(00)^*$
$= 0(00)^* + 01(00)^*$

9) $R_{33}^{(2)} = R_{33}^{(2-1)} + R_{32}^{(2-1)}(R_{22}^{(2-1)})^* R_{23}^{(2-1)}$
$= \varepsilon + 11 + (0 + 10)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01)$
$= \varepsilon + 11 + (0(00)^* + 10(00)^*)(1 + 01)$
$= \varepsilon + 11 + 0(00)^*1 + 0(00)^*01 + 10(00)^*1 + 10(00)^*01$

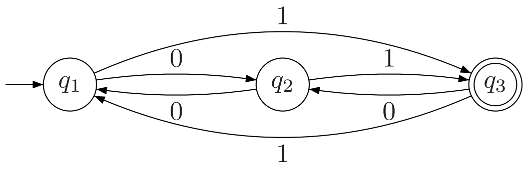
d) Um den Ausdruck zu formulieren, der die selbe Sprache beschreibt, wie der DEA, müssen alle Teilausdrücke $R_{ij}^{(3)}$ für alle $i \in q_0$ und $j \in F$ (alle Ausdrücke die vom Startzustand zu einem akzeptierenden Zustand führen) vereinigt werden. Das betrifft bei diesem DEA nur jenen Ausdruck, der von Zustand $1(q_0)$ zu Zustand 3 (q_2) führt. Genauer:

$$R_{DEA} = R_{13}^{(3)}$$

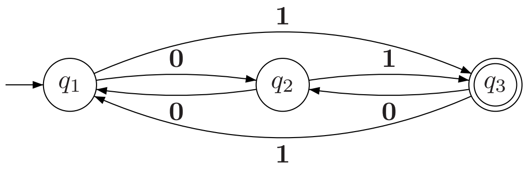
Also muss noch der Ausdruck $R_{13}^{(3)}$ gebildet werden:

$$
\begin{aligned}
R_{13}^{(3)} &= R_{13}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{33}^{(2)} \\
&= 1 + 0(00)^*1 + 0(00)^*01 + (\varepsilon + 11 + 0(00)^*1 + 0(00)^*01 + 10(00)^*1 + 10(00)^*01)^* \\
&= 1 + 0(00)^*1 + 0(00)^*01 + (11 + 0(00)^*1 + 0(00)^*01 + 10(00)^*1 + 10(00)^*01)^* \\
&= 1 + 0(00)^*(1 + 01) + (11 + 0(00)^*(1 + 01) + 10(00)^*(1 + 01))^* \\
&= 1 + 0(00)^*(1 + 01) + (11 + (0(00)^* + 10(00)^*)(1 + 01))^*
\end{aligned}
$$

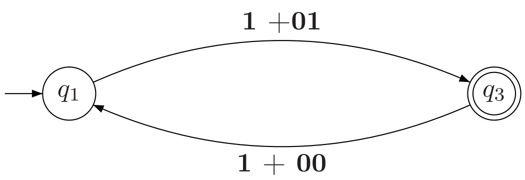
e) Der Graph des DEA sieht wie folgt aus:



Auf den Übergangspfeilen des DEAs stehen im Moment noch Zeichenreihen. Diese werden als erstes in reguläre Ausdrücke umgeschrieben. Danach sieht der DEA mit regulären Ausdrücken auf den Pfeilen wie folgt aus*reguläre Ausdrücke seien hier mal fett gedruckt*:



Man beachte, dass der reguläre Ausdruck, der die Zeichenkette bestehend aus $\{a\}$ beschreibt, **a** lautet. Deshalb hat sich am Graphen selbst nichts geändert. Um nun den Zustand q_2 zu eliminieren werden wie im Buch beschrieben, die r. Audrücke die zum Zustand q_2 führen (seien **a**), die vom Zustand q_2 zu sich selbst führen (seien **b**) und die, die vom Zustand weg führen (seien **c**) aneinander gereiht, in der Form **abc**. Da es noch Pfade gibt, die genau in die andere Richtung verlaufen, muss das ganze auch von q_3 nach q_1 in der Gegenrichtung gemacht werden. Dies führt zu dem folgenden Übergangsgraphen:



Aus diesem Graphen lässt sich leicht ein Ausdruck formulieren, der die selbe Sprache beschreibt, wie der DEA: Man muss mindestens einmal von q_1 nach q_3 kommen. Von da an kann man beliebig oft (auch 0 mal) zurück zu q_1 und von dort aus wieder zu q_3. Das ergibt den folgenden Ausdruck:

$$(1 + 01)((1 + 00)(1 + 01))^* \tag{1}$$